数理解析研究所講究録
641巻 1988年 137-154

Resolutions of determinantal ideals, t-minors of (t+2)×(t+2)-matrices

京大理 蔵野和彦 (Kazuhiko Kurano)
京大理 橋本光靖 (Mitsuyasu Hashimoto)

行列のある order の小行列式で生成されるイデアルを determinantal ideal と呼び、それが定める多様体を determinantal variety ということにする。

determinantal variety は古くから Hilbert, Macaulay, Gambelli など多くの数学者の研究対象となってきた。そして約30年前から次のような問題が研究され続けている。

問題. m, n, t を自然数とし $(1 \leq t \leq \min(m, n))$、$R = \mathbb{Z}[X_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ を有理整数環 $\mathbb{Z}$ 上の多項式環、I_t を行列 (X_{ij}) の t 次小行列式全体で生成されるイデアルとする。このとき、R/I_t の minimal free resolution を見つけることができるか、

minimal free resolution とは R/I_t の R 上の自由分解で、それぞれの bounday map の成分が定数項を持たないものである。

$t=1$ の場合は、古くからよく知られているKoszul complex がそうである。また $t=\min(m,n)$ のときは [E-N]、$t+1=m=n$ のときは [G-N]、さらに $t+1=n\leq m$ の場合には [A-B-W]$_1$ でその問題の解答が与えられている。しかし一般の m, n, t に対しては知られていない。

この種の研究が進んでゆくうちに、この問題は一般線形群の多項式表現と重要な関係を持つことが次第にわかってきた。そのため標数0の体上での一般線形群の多項式表現に関する理論をある程度、一般の環上でも実現させようという試みがさかんに行なわれている（例えば [A-B-W]$_2$）。

最近、次のような結果が得られました。

<u>Theorem</u>. $m=n=t+2$ とする。このとき R/I_t のBetti number は標数によらない。つまり、この場合 R/I_t の minimal free resolution は存在する。

以下、この定理の証明の概略をのべる。

最後まで、$m=n=t+2$、つまり $R=\mathbb{Z}[x_{ij}]_{1\leq i,j\leq t+2}$ とし、各 x_{ij} の次数を1として R を次数環と思うことにする。

§1. Betti numbers.

<u>Definition</u> 1. pを素数，又は0として，$\mathbb{F}_p$を標数pの素体とする。このとき，

$$\beta_p(i,t) := \dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Tor}_i^{R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_p}(R/I_t \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p,\ R/I_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p)$$

と定め，これをi番目のBetti numberという。

$R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_p$は体上の多項式環であるから，その次数加群$R/I_t\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_p$は，(graded) minimal free resolutionを持つ。$\beta_p(i,t)$は，そのresolutionのi番目のfree moduleのrankに他ならない。

Betti numberとminimal free resolutionの存在性は，次の命題で関係づけられている。

<u>Proposition</u> 2 (P. Roberts, [R]). 次は同値。

1). R/I_tのR上のminimal free resolutionが存在する。

2). 任意のiに対して，$\mathrm{Tor}_i^R(R/I_t, R/I_1)$は$\mathbb{Z}$-free。

3). 任意のiに対して，$\beta_p(i,t)$はpによらない。

(この命題は，[R]ではもっと一般に，$\mathbb{Z}$上の多項式環Sとその斉次イデアルJで，S/Jが$\mathbb{Z}$-freeになる場合に示さ

れている。[D-P]により、$\mathbb{Z}$上のgeneric matrixのdeterminantal idealはこれを満たすことがわかる。)

上の命題より、R/I_tのminimal free resolutionの存在を知るためには、$\beta_p(i,t)$がiとtだけによって定まりpによらないことを示せば十分なのである。

[H-E]により今の場合、$R/I_t\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_p$の射影次元は9であり、さらに[S]により$R/I_t\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_p$はGorenstein環となることがわかっている。これらのことより任意のtに対して、

$$\beta_p(i,t)=0 \qquad \text{for} \quad i<0\ ,\ i>9$$

$$\beta_p(k,t)=\beta_p(9-k,t) \qquad \text{for} \quad k=0,1,\cdots,4$$

となることがわかる。だから、$\beta_p(i,t)$ $(i=0,1,\cdots,4)$の5つがpによらないことを示せばよいのである。

§2、$\beta_p(i,t)$の計算($i=0,1,2,3$)

(0) $\beta_p(0,t)$は、$R/I_t\otimes\mathbb{F}_p$のminimal free resolutionの最初の自由加群の階数である。このことより、$\beta_p(0,t)=1$を得る。

(1) $\beta_p(1,t)$ は、$R\otimes\mathbb{F}_p$ のイデアルの homogeneous minimal generator の数となる。$(t+2)$-正方行列には、t 次小行列式は $\binom{t+2}{t}^2$ 個ある。それらは $\mathbb{F}_p$ 上一次独立となる。故に、$\beta_p(1,t)=\binom{t+2}{t}^2$ となり、これも p によらない。

(2) $\beta_p(2,t)$ は、$\binom{t+2}{t}^2$ 個の小行列式の relation module の minimal generator の数である。これを計算するために、次の定理を使う。

<u>Theorem</u> 3, ([K]) 任意の係数環上、generic matrix の小行列式の relation module は、1次の relation により生成される。

この定理により、$R/I_t\otimes\mathbb{F}_p$ の $R\otimes\mathbb{F}_p$ 上の minimal free resolution のはじめの部分は次のような形をしている。

$$(R\otimes\mathbb{F}_p)(-t-1)^{\beta_p(2,t)}\longrightarrow(R\otimes\mathbb{F}_p)(-t)^{\binom{t+2}{t}^2}\longrightarrow R\otimes\mathbb{F}_p\longrightarrow R/I_t\otimes\mathbb{F}_p\longrightarrow 0.$$

この完全列の $t+1$ 次の部分は次のような形をしている。

$$0\longrightarrow(R\otimes\mathbb{F}_p)_0^{\beta_p(2,t)}\longrightarrow(R\otimes\mathbb{F}_p)_1^{\binom{t+2}{t}^2}\longrightarrow(R\otimes\mathbb{F}_p)_{t+1}\longrightarrow(R/I_t\otimes\mathbb{F}_p)_{t+1}\longrightarrow 0.$$

$(R\otimes\mathbb{F}_p)_0^{\beta_p(2,t)}$ を除く上の3つのベクトル空間の次元は、p によ

らない。([D-P]により、$(R/I_t \otimes \mathbb{F}_p)_{t+1}$ の次元は p によらないことがわかる。) このことから $\beta_p(2,t)$ が p によらないことがわかる。

(3) $\beta_p(3,t)$ は、小行列式の1次の relation らの relation module の minimal generator の数となる。これを調べるために次の定理を使う。

Theorem 4. minimal free resolution の次の部分，すなわち写像 $(R\otimes\mathbb{F}_p)(-t-1)^{\beta_p(2,t)} \longrightarrow (R\otimes\mathbb{F}_p)(-t)^{\binom{t+2}{t}^2}$ の Kernel は、1次の relation により生成される。

証明： 省略

(上の定理はもっと一般に、generic $m\times(t+2)$-行列の t 次小行列式により生成されるイデアルに対して示される。しかし一般のサイズの generic matrix の場合には、必ずしも成立しないことが橋本により証明されている。)

定理4を使えば、(2)と同様にして $\beta_p(3,t)$ が p によらないことが証明される。

(0)、(1)、…、(3) により、$\beta_p(i,t)$ は、$i=0,1,2,3$ の場合には p

によらないことが示された。

§3、Linear complexes.

$\mathbb{F}(p.t)_\bullet$ を、$R/I_t\otimes\mathbb{F}_p$ の $R\otimes\mathbb{F}_p$ 上の minimal free resolution とする。このとき Betti number の定義から $F(p.t)_i=(R\otimes\mathbb{F}_p)^{\beta_p(i.t)}$ となる。$F(p.t)_i$ は graded free module であるから、次のような形をしている。

$$F(p.t)_i = \bigoplus_k (R\otimes\mathbb{F}_p)(-k)^{\beta_p(i.t)_k}$$

$$\left(\ \beta_p(i.t)=\sum_k \beta_p(i.t)_k\ \right)$$

このとき、$\beta_p(i.t)_k$ は、minimal free resolution のとり方によらずに定まる。だから、全ての i、t、k に対して $\beta_p(i.t)_k$ が p によらないことがいえればよい。

<u>Lemma</u> 5

$$\beta_p(9.t)_k = \begin{cases} 1 & \text{for } k=3t+6 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

証明. $\mathbb{Q}$ を有理数体とする。このとき、$R/I_t\otimes\mathbb{Q}$ の graded minimal free resolution の9番目の自由加群は確かに $(R\otimes\mathbb{Q})(-3t-6)$

となっている([L])。この $3t+6$ は、$R/I_t \otimes \mathbb{Q}$ の canonical module の生成元の次数を表わしている。[D-P]より、$R/I_t \otimes \mathbb{F}_p$ の Poincaré series は標数によらないことがわかる。そのことから canonical module の生成元の次数も標数によらないことがわかる。 Q.E.D.

Sectin 2 より、$R/I_t \otimes \mathbb{F}_p$ の $R \otimes \mathbb{F}_p$ 上の minimal free resolution の最初の部分は次のような形をしていることがわかる。

$$(R\otimes\mathbb{F}_p)(-t-2)^{\beta_p(3,t)} \longrightarrow (R\otimes\mathbb{F}_p)(-t-1)^{\beta_p(2,t)} \longrightarrow (R\otimes\mathbb{F}_p)(-t)^{\beta_p(1,t)} \longrightarrow (R\otimes\mathbb{F}_p)^{\beta_p(0,t)} \longrightarrow 0$$

ここで、$\beta_p(1,t)=\beta_p(1,t)_t$，$\beta_p(2,t)=\beta_p(2,t)_{t+1}$，$\beta_p(3,t)=\beta_p(3,t)_{t+2}$ が成立することに注意する。

$(R/I_t \otimes \mathbb{F}_p)$ は Gorenstein 環であるから、その graded minimal free resolution の dual をとって次数をてきとうにずらせば、それは再び $R/I_t \otimes \mathbb{F}_p$ の graded minimal free resolution となることがわかる。そのことから、$R/I_t \otimes \mathbb{F}_p$ の graded minimal free resolution は次のような形をしていることがわかるのである。

$$0 \to (R\otimes\mathbb{F}_p)(-3t-6)^{\beta_p(9,t)} \longrightarrow (R\otimes\mathbb{F}_p)(-2t-6)^{\beta_p(8,t)} \longrightarrow (R\otimes\mathbb{F}_p)(-2t-5)^{\beta_p(7,t)} \longrightarrow (R\otimes\mathbb{F}_p)(-2t-4)^{\beta_p(6,t)} \cdots\cdots$$

ここで、$\beta_p(9,t)_{3t+6}=\beta_p(9,t)$，$\beta_p(8,t)_{2t+6}=\beta_p(8,t)$，$\beta_p(7,t)_{2t+5}=\beta_p(7,t)$，$\beta_p(6,t)_{2t+4}=\beta_p(6,t)$ が成立する。

このminimal free resolution を次のようなグラフで表わす。

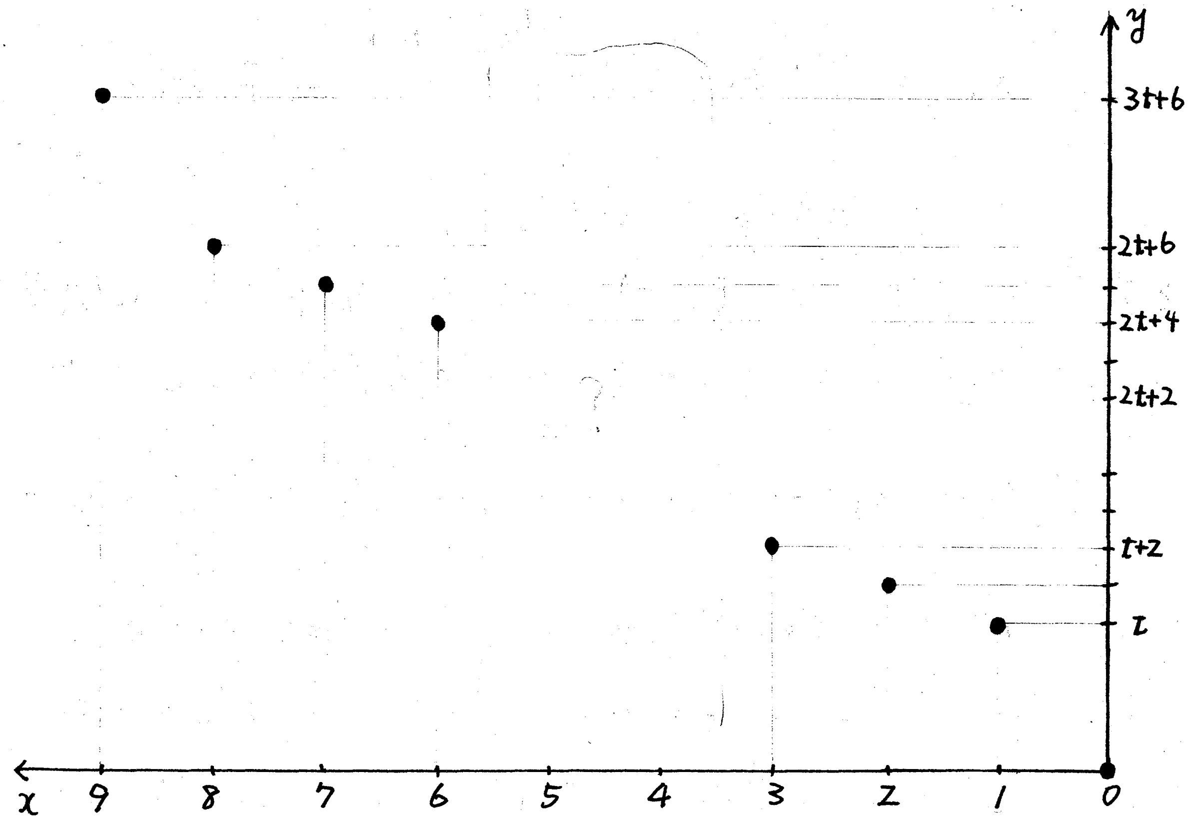

Diagram I

整数の組 (x, y) に対して、$\beta_p(x,t)_y \neq 0$ であるときに、点 (x,y) に"•"を書いたのが、このグラフである。体上の多項式環のminimal free resolution の性質より、

- $\beta_p(4,t)_k = 0$ for $k < t+3$, $k > 2t+2$
- $\beta_p(5,t)_k = 0$ for $k < t+4$, $k > 2t+3$

となることがわかる。

Definition 6. $R/I_t \otimes \mathbb{F}_p$ の $R \otimes \mathbb{F}_p$ 上の minimal free resolution

$\mathbb{F}(p,t)_\circ$ に対して.

$$X_i := (R\otimes\mathbb{F}_p)(-t-i+1)^{\beta_p(i,t)_{t-i+1}} \subseteq F(p,t)_i \qquad i=1,2,\dots,5.$$

$$X_0 := R\otimes\mathbb{F}_p = F(p,t)_0$$

と定める。このとき、$\mathbb{F}(p,t)$ の boundary map を X_i に制限すれば、その像は X_{i-1} に入ることがわかる。このことより、

$$0 \to X_5 \to X_4 \to X_3 \to X_2 \to X_1 \to X_0 \to 0$$

は、$\mathbb{F}(p,t)$ の sub complex となる。これを Linear complex ということにする。(Linear complex は、$X_i \to X_{i-1}$ の Kernel の次数がいちばん小さい部分だけに注目して作った Complex である。簡単に、Linear complex は、minimal free resolution のとり方によらず、同型を除いて一意的となることがわかる。)

<u>Lemma</u> 7. $\beta_p(4,t)_{t+3}$, $\beta_p(5,t)_{2t+3}$ は p によらない。

証明. Diagram I より、Linear complex の $t+3$ 次の部分は次のようになっている。

$$\begin{array}{l} 0 \to (X_4)_{t+3} \to (X_3)_{t+3} \to (X_2)_{t+3} \to (X_1)_{t+3} \to (X_0)_{t+3} \to (R/I_t\otimes\mathbb{F}_p)_{t+3} \to 0 \\ \quad\ \ \| \\ (R\otimes\mathbb{F}_p)_0^{\beta_p(4,t)_{t+3}} \end{array}$$

これは、minimal free resolution の $t+3$ 次の部分でもあるから、完全列である。各ベクトル空間の次元を見てやれば、$\beta_p(4,t)_{t+3}$ は p によらないことがわかる。$\mathbb{F}(p,t)$ の dual の次数をてきとうにずらせば再び minimal free resolution となる。このことから $\beta_p(4,t)_{t+3}=\beta_p(5,t)_{2t+3}$ がいえる。 Q.E.D.

Lemma 8　$\beta_p(4,t)_{2t+2}$, $\beta_p(5,t)_{t+4}$ は p によらない。

証明. 省略する.

Lemma 7, 8 より、Diagram I の $x=4,5$ の部分はある程度わかる。

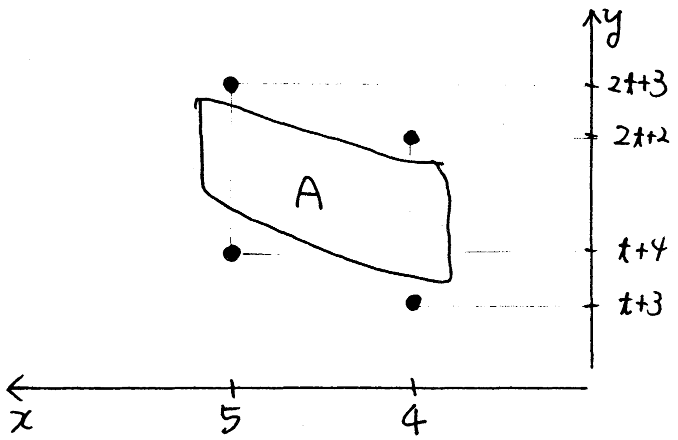

Diagram II

Diagram II の $\boxed{A}$ の部分以外は、$\beta_p(x,t)_y$ は p によらずに一定の値をとる。

[L] より、$R/I_t\otimes\mathbb{Q}$ の $R\otimes\mathbb{Q}$ 上の minimal free resolution で

は、$\boxed{A}$ の部分では $\beta_0(x,t)_y=0$ となっていることがわかる。

故に、任意の p と、$\boxed{A}$ に含まれる任意の (x,y) に対して、$\beta_p(x,t)_y=0$ を示さなければならない。

§4. Minimal free resolution の存在（$t \neq 4$ の場合）

Proposition 9. $t=2$ or 3 とする。このとき R/I_t の minimal free resolution は存在する。

証明. $t=2$ とすると、$t+3=5$, $2t+2=6$ となることより、$A=\phi$ となる。故にこのときは、minimal free resolution は存在する。

$t=3$ のときは、Diagram II は、次のようになっている。

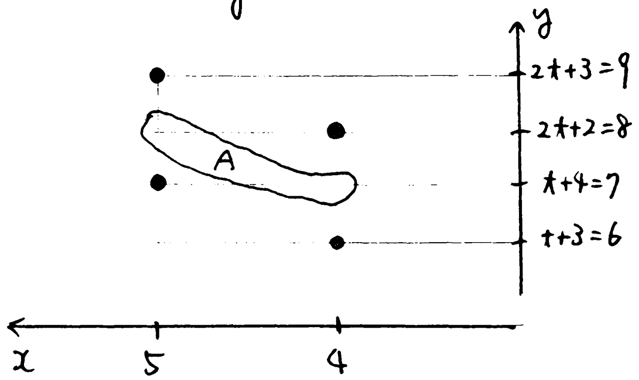

Diagram III

つまり、Aは、$(4,7)$, $(5,8)$ の2点から成る集合である。

minimal free resolution $\mathbb{F}(p,3)_\bullet$ の7次の部分をみる。$\mathbb{F}(0,3)_\bullet$ の7次の部分と比較すると $\beta_p(4,3)_7=0$ がわかる。($(\mathbb{F}(p,3)_\bullet)_7$ と $(\mathbb{F}(0,3)_\bullet)_7$ とは、4番目の moduleを除き、ベクトル空間の次元は等しい。このことから、$\dim_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}(p,3)_4)_7 = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{F}(0,3)_4)_7$ となり、$\beta_p(4,3)_7=0$ がわかる。)

dualをとってやれば、$\beta_p(5,3)_8=0$ もわかる。minimal free resolutionは、$t=3$ の場合も存在する。　　Q.E.D.

次に $t\geqq 5$ の場合を考える。

<u>Proposition</u> 10.　任意の p と $t\geqq 5$ に対して、

$$\beta_p(4,t)_k=0 \qquad \text{for} \quad t+4 \leqq k \leqq 2t.$$

証明、省略する。(ほぼ、定理4と同様な手法でできる。)

上の命題より、

$$\beta_p(5,t)_k=0 \qquad \text{for} \quad t+6 \leqq k \leqq 2t+2.$$

となることがわかる。あとわからないのは $\beta_p(4,t)_{2t+1}$ と、$\beta_p(5,t)_{t+5}$ である。どちらかが0であることが示されれば、両方0であることがわかる。

Theorem 11. $t \neq 4$ ならば. R/I_t の minimal free resolution は存在する。

証明. あと $t \geq 5$ のとき $\beta_p(5, t)_{t+5} = 0$ を示せばよい。$t \geq 5$ より、$t+4 \leq t+5 \leq 2t$ となり. 命題10より $\beta_p(4, t)_{t+5} = 0$ となることがわかる。このことより. 命題9の $t=3$ の場合のように. minimal free resolution の $t+5$ 次の部分をとり出して. $\mathbb{Q}$ 上のものと比較すれば. $\beta_p(5, t)_{t+5} = 0$ となることがわかる。

Q. E. D.

§5. Minimal free resolution の存在 ($t=4$ の場合)

あと $t=4$ の場合に minimal free resolution の存在を示さなければならない。$\beta_p(i, 4)$ は. i が 4、5 以外では標数 p によらないことを示した。$\beta_p(4, 4) = \beta_p(5, 4)$ より、あと $\beta_p(4, 4)$ が p によらないことを示せばよい。

ここでは. 証明の概略のみを述べることにする。

$S = \mathbb{Z}[y_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 7}$ として. 7次正方行列 $Y = (y_{ij})$ の5次小行列式全体で生成されるイデアルを J_5 と書くことにす

る。

7×7 行列 (y_{ij}) に、

$$\begin{pmatrix} (x_{ij}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を対応させることにより、$R = \mathbb{Z}[x_{ij}]_{1 \le i,j \le 6}$ は、S-algebra の構造を持つ。このとき、$J_5 R = I_4$ をみたすことに注意する。

定理 11 より、S/J_5 は S 上に minimal free resolution をもつことがわかる。それを、

$$\mathbb{P}_\bullet : \quad 0 \to P_9 \to P_8 \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0$$

とする。

<u>Lemma</u> 12. $\mathbb{P}_\bullet \otimes_S R$ は、R/I_4 の finite free resolution となる。

証明. J_5 は、perfect ideal (proj. dim S/J_5 = grade(J_5)) であるから、その resolution $\mathbb{P}_\bullet$ は、depth sensitivity という性質を持つことが知られている。このとき、depth$(J_5 . R)$ = grade(I_4) = 9 であるから、$\mathbb{P}_\bullet \otimes R$ は acyclic であり、

$$H_0(\mathbb{P}_\bullet \otimes_S R) = S/J_5 \otimes_S R = R/J_5 R = R/I_4$$

となる。このことから、$\mathbb{P}_\bullet \otimes_S R$ は、R/I_4 の finite free resolution

となる。 Q.E.D.

<u>Proposition</u> 13. $\beta_p(4,4)$ は p によらない。

証明. $\beta_p(4,4) = \dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Tor}_4^{R\otimes\mathbb{F}_p}(R/I_4\otimes\mathbb{F}_p, R/I_1\otimes\mathbb{F}_p)$ を計算するのに、$\mathbb{P}.\otimes_S R$ を使う。細かい計算はここでは省略する。

以上により、次の定理が得られた。

<u>Theorem</u> 14. 任意の i と t に対して、$\beta_p(i,t)$ は p によらない。すなわち、R/I_t の R 上の minimal free resolution は存在する。

<u>Remark</u> 15. R に 2 の逆元をつけ加えた環を T とする。このとき、比較的簡単に T/I_t の T 上の minimal free resolution を構成することができる。しかし、R/I_t の R 上の minimal free resolution を具体的に構成するのは非常に困難である。というのは、minimal free resolution の中で出てくる次数が t の部分の boundary map の作り方がむずかしいのである。[A-B-W]$_1$ による submaximal minor の minimal free resolution においても次数 t の部分の写像は、自然な写像であるとはいえない。

References

[A-B-W]$_1$ K. Akin, D. A. Buchsbaum, J. Weyman, Resolutions of determinantal ideals: the submaximal minors, Adv. in Math. 39 (1981), 1-30.

[A-B-W]$_2$ Schur functors and Schur complexes, Adv. in Math. 44 (1982) 207-278.

[D-P] C. Deconcini, C. Proseci, A characteristic free approach to invariant theory, Adv. in Math. 21 (1976), 330-354.

[E-N] J. A. Eagon, D. G. Northcott, Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 269 (1962), 188-204.

[G-N] T. H. Gulliksen, O. G. Negård, Un complexe résolvant pour certains idéaux determinantiels, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 274 (1972), 16-19.

[H-E] M. Hochster, J. A. Eagon, Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci, Amer. J. Math. 93 (1971), 1020-1058.

[L] A. Lascoux, Syzygies des variétés déterminantalés, Adv. in Math. 30 (1978), 202-237.

[K] K. Kurano, The first syzygies of determinantal ideals, Preprint.

[R] "Homological invariants of modules over commutative rings", Les Presses de l'Université de Montreal, Montreal 1980.

[S] T. Svanes, Coherent cohomology of Schubert subschemes of flag schemes and applications, Adv. in Math. 14 (1974), 369-453.